Die Kehrwert-Paarung:
Eine symmetriebasierte Definition des Produkts aller Elemente in Divisionsalgebren

$$\prod_{a \neq 0} a = e^{i\pi}$$

Jörg Mösch

Januar 2026

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License.
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Die Kehrwert-Paarung: Eine symmetriebasierte Definition des Produkts aller Elemente in Divisionsalgebren

Jörg Mösch
mailtojoerg@proton.me

6. Januar 2026

Zusammenfassung

Dieses Papier führt die **Kehrwert-Paarung** ein, eine strukturelle Methode zur Bestimmung des in der klassischen Analysis nicht wohldefinierten Produkts aller von Null verschiedenen Elemente einer Divisionsalgebra. Die Methode paart jedes Element mit seinem Kehrwert unter der natürlichen Involution $\iota(x) = x^{-1}$ und reduziert so das Problem auf das Produkt der Fixpunkte $\mathrm{Fix}(\iota) = \{x \mid x^2 = 1\}$.

Angewandt auf die reellen normierten Divisionsalgebren $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ ergibt sich so jeweils der kanonische Wert -1. Das Verfahren ist rein algebraisch, reihenfolgeunabhängig und kommt ohne analytische Hilfsmittel aus.

Schlüsselwörter: Kehrwert-Paarung, Algebraische Symmetrie, Divisionsalgebren, Involution, Fixpunkte, Unendliche Produkte

MSC2020: 16K20, 17A35

1 Einleitung

„Was ist die multiplikative Verknüpfung von allem?“ In der klassischen Analysis ist das Produkt über alle Elemente einer überabzählbaren Menge nicht wohldefiniert. Auch analytische Regularisierungsmethoden wie die Zeta-Funktions-Regularisierung [5] sind für Produkte über ungeordnete oder kontinuierliche Mengen wie $\mathbb{R}^\times$ grundsätzlich ungeeignet, da sie sowohl eine analytische Fortsetzung als auch eine lineare Ordnung der Faktoren benötigen.

Eine ältere Idee des Autors aufgreifend [4, p. 60], und in Analogie zur bekannten Verallgemeinerung des Wilson-Theorems auf endliche Körper [2, p. 162], schlägt dieses Papier einen **strukturellen Ansatz** vor, der die inhärente algebraische Symmetrie der Multiplikation berücksichtigt. Für eine Divisionsalgebra K ist auf ihrer multiplikativen Gruppe $K^\times$ die Involution $x \mapsto x^{-1}$ [3] eine kanonische Symmetrie, die allein aus der Gruppenstruktur folgt; sie benötigt keine zusätzliche algebraische Struktur (wie Konjugation, Norm oder Ordnung) und existiert in jeder Gruppe invertierbarer Elemente. Die Kehrwert-Paarung nutzt diese Symmetrie, um das Produkt über alle von Null verschiedenen Elemente einer Divisionsalgebra K ohne analytische Hilfsmittel zu definieren.

2 Die Kehrwert-Paarung

Definition 2.1 (Kehrwert-Paarung)**.** Sei K eine Divisionsalgebra mit multiplikativer Gruppe $K^\times = K \setminus \{0\}$. Die *Kehrwert-Involution*

$$\iota \colon K^\times \to K^\times, \quad \iota(x) = x^{-1}$$

induziert die disjunkte Orbitzerlegung von $K^\times$ unter der von ι erzeugten Gruppe $\langle \iota \rangle = \{\mathrm{id}, \iota\}$:

$$K^\times = \mathrm{Fix}(\iota) \sqcup \bigsqcup_{\{x,x^{-1}\}\in\mathcal{P}} \{x, x^{-1}\}$$

wobei

- $\mathrm{Fix}(\iota) = \{x \in K^\times \mid x^2 = 1\}$ die Fixpunkte sind,
- $\mathcal{P} = \{\{x, x^{-1}\} : x \in K^\times, x \neq x^{-1}\}$ die Menge der (ungeordneten) zweielementigen Orbits ist.

Das **Produkt** über alle von Null verschiedenen Elemente einer Divisionsalgebra wird unter Berücksichtigung der **Kehrwert-Paarung** definiert als:

$$\boxed{\prod_{x\in K^\times} x := \prod_{z\in\mathrm{Fix}(\iota)} z}$$

Satz 2.2 (Orbit-Beitrag). *Für jedes Paar $\{x, x^{-1}\}$ mit $x \notin \mathrm{Fix}(\iota)$ gilt:*

$$x \cdot \iota(x) = x \cdot x^{-1} = 1$$

Da alle zweielementigen Orbits $\{x, x^{-1}\}$ multiplikativ den neutralen Faktor 1 liefern, tragen nach Definition 2.1 nur die Fixpunkt zum Gesamtprodukt bei.

Beweis. In Divisionsalgebren ist für jedes $x \neq 0$ das multiplikative Inverse x^{-1} eindeutig durch die Bedingung

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

definiert, wobei 1 das Einselement der Algebra bezeichnet. Für $x \notin \mathrm{Fix}(\iota)$ gilt zudem $x^{-1} \neq x$, sodass die Paare $\{x, x^{-1}\}$ wohldefiniert sind und jeweils $x \cdot x^{-1} = 1$ liefern. □

3 Anwendung auf reelle normierte Divisionsalgebren

Im Folgenden werden die vier reellen normierten Divisionsalgebren $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ [1, p. 4f] betrachtet.

Satz 3.1 (Fixpunkte in normierten Divisionsalgebren). *Für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ gilt:*

$$\mathrm{Fix}(\iota) = \{x \in K^\times \mid x^2 = 1\} = \{1, -1\}$$

Beweis. Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ und $x \in K$ mit $x^2 = 1$. Jedes Element lässt sich schreiben als $x = a + y$, wobei:

- $a \in \mathbb{R}$ der Realteil ist,
- y rein imaginär ($\overline{y} = -y$) mit $y^2 = -|y|^2 \leq 0$.

Dann gilt:

$$x^2 = (a + y)^2 = a^2 + 2ay + y^2 = a^2 - |y|^2 + 2ay = 1.$$

Da $a^2 - |y|^2 \in \mathbb{R}$ und $2ay$ rein imaginär, folgt durch Trennung:

$$\begin{cases} a^2 - |y|^2 = 1 \\ 2ay = 0 \end{cases}$$

- Falls $a = 0$: Dann $0 - |y|^2 = 1 \Rightarrow |y|^2 = -1$, unmöglich.

- Falls $y = 0$: Dann $x = a \in \mathbb{R}$ mit $a^2 = 1$, also $a = \pm 1$.

Somit sind 1 und -1 die einzigen Lösungen von $x^2 = 1$ in allen vier Algebren. □

Satz 3.2 (Hauptresultat)**.** *Für jede reelle normierte Divisionsalgebra gilt:*

$$\boxed{\prod_{x \in K^\times} x = -1}$$

Beweis. Nach Satz 3.1 gilt $\mathrm{Fix}(\iota) = \{1, -1\}$ für alle $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$. Für $x \notin \mathrm{Fix}(\iota)$ liefert Satz 2.2 $x \cdot x^{-1} = 1$ (auch in $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$, da $x^{-1} = \overline{x}/|x|^2$ mit $x\overline{x} = \overline{x}x$). Da die Definition nur Produkte von zwei Elementen (nämlich x und x^{-1}) umfasst, die selbst in nicht-assoziativen Algebren wohldefiniert sind, und ein endliches Produkt über $\mathrm{Fix}(\iota)$, wird keine Assoziativität benötigt. Da 1 und -1 im Zentrum jeder reellen Divisionsalgebra liegen, ist ihr Produkt unabhängig von der Reihenfolge. Mit Definition 2.1 folgt daher:

$$\prod_{x \in K^\times} x = \prod_{z \in \{1,-1\}} z = 1 \cdot (-1) = -1.$$

□

Die konkreten Ergebnisse für die vier reellen Divisionsalgebren fasst Tabelle 1 zusammen.

Tabelle 1: Das Gesamtprodukt $\prod_{x \in K^\times} x$ für reelle normierte Divisionsalgebren

Algebra	$\mathrm{Fix}(\iota)$	$\prod_{x \in K^\times} x$
$\mathbb{R}^\times$	$\{1, -1\}$	-1
$\mathbb{C}^\times$	$\{1, -1\}$	-1
$\mathbb{H}^\times$	$\{1, -1\}$	-1
$\mathbb{O}^\times$	$\{1, -1\}$	-1

4 Weitere Anwendungen

Die Kehrwert-Paarung ist nicht auf die klassischen reellen Divisionsalgebren beschränkt. Ihre rein algebraische Natur erlaubt eine Übertragung auf jede multiplikative Struktur, die eine wohldefinierte Inversion und eine endliche Fixpunktmenge unter der Involution $x \mapsto x^{-1}$ besitzt. Denkbare Anwendungskontexte umfassen:

- **p-adische Körper**: Für die multiplikativen Gruppen $\mathbb{Q}_p^\times$ der p-adischen Zahlen oder endlicher Erweiterungen davon, die diskrete und kontinuierliche Strukturen mischen, könnte das Prinzip zu neuen arithmetischen Invarianten führen.
- **Lie-Gruppen**: Für kompakte Lie-Gruppen, die sowohl kontinuierliche als auch algebraische Strukturen aufweisen, könnte die Kehrwert-Paarung zu neuen Perspektiven auf invariante Integration führen.
- **Physikalische Pfadintegrale**: In Quantenfeldtheorien mit quaternionischen oder oktavischen Feldern könnte die Kehrwert-Paarung eine rein algebraische Regularisierung von Funktionaldeterminanten bieten und so eine Alternative zur etablierten Zeta-Regularisierung [5] darstellen.

- **Geometrisches maschinelles Lernen**: In neuronalen Netzen mit Gewichten in $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ ließe sich das Prinzip zur Definition symmetrieerhaltender Regularisierungsterme nutzen.

Eine systematische Untersuchung dieser Richtungen bleibt zukünftigen Arbeiten überlassen.

Schlussbemerkung

Die scheinbar naive Frage „Was ist die multiplikative Verknüpfung von allem?“ führte zur *Kehrwert-Paarung* – einer strukturellen Definition, die nicht auf analytischen Grenzwerten, sondern auf der inneren Symmetrie der Multiplikation basiert. Durch Ausnutzung der Involution $\iota(x) = x^{-1}$ [3] wird die Fragestellung auf die Berechnung des Fixpunktprodukts reduziert.

Im endlichen Fall reproduziert dieses Prinzip die bekannte Verallgemeinerung des Wilson-Theorems für endliche Körper, $\prod_{x \in \mathbb{F}_q^\times} x = -1$ [2, p. 162]. Im unendlichen Fall führt es für alle vier normierten Divisionsalgebren $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ konsistent zum selben Ergebnis -1.

Die Konsistenz des Resultats -1 unterstreicht die Universalität des symmetriebasierten Ansatzes und eröffnet Perspektiven für weiterführende Untersuchungen in Algebra und mathematischer Physik.

Transparenzhinweis

Dieses Papier wurde mit Assistenz von DeepSeek AI erstellt. Die KI unterstützte bei mathematischer Präzisierung und LaTeX -Umsetzung . Die mathematischen Ideen, Resultate und Schlussfolgerungen stammen vollständig vom Autor.

Literatur

[1] John C. Baez, *The Octonions*, arXiv:math/0105155v4 [math.RA] (2002). https://arxiv.org/abs/math/0105155

[2] Gerd Fischer, Reinhardt Sacher, *Einführung in die Algebra*. 2. überarbeitete Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart (1978).

[3] Involution. *Encyclopedia of Mathematics*. https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Involution&oldid=47428 (Abgerufen am 06.01.2026).

[4] Jörg Mösch, *Geheimes zu Kugelpackungen und Figurierten Zahlen*, figshare (2023). https://doi.org/10.6084/m9.figshare.22817732.v1

[5] Zeta-function method for regularization. *Encyclopedia of Mathematics*. https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Zeta-function_method_for_regularization&oldid=37135 (Abgerufen am 06.01.2026).

Korrespondenz:
Jörg Mösch
c/o Block Services, Stuttgarter Straße 106, D-70736 Fellbach
mailtojoerg@proton.me